# Forblad

**Vridning af Trappetrin**

**K.W. Johansen**

**Tidsskrifter**

**BSM 11-2 Bygningsstatiske Meddelelser**

**1940**

# VRIDNING AF TRAPPETRIN

AF *K. W. JOHANSEN*

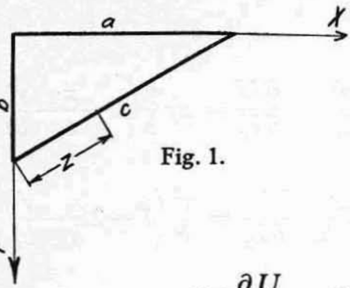


Fig. 1.

Tværsnittet kan regnes som retvinklet Trekant (Fig. 1), og Formlerne i A. Ostenfelds: Teknisk Elasticitetslære § 27 benyttes, dog erstattes Spændingsfunktionen $T$ med den dermed proportionale $U$, idet $T = G\vartheta U$, hvorved

$$\tau_{zy} = G\vartheta \frac{\partial U}{\partial x} = G\vartheta U_x \quad \tau_{zx} = -G\vartheta \frac{\partial U}{\partial y} = -G\vartheta U_y. \tag{1}$$

Randbetingelsen er $T = 0$, og dermed ogsaa $U = 0$, langs Randen.

Det totale vridende Moment er

$$M = 2\int T dF = 2 G\vartheta \int U dF. \tag{2}$$

For en Skive af Tykkelse 1 og begrænset af to Normalsnit faas

$$A_i - 2A_u = \frac{1}{2G}\int (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)\, dF - M\vartheta$$

eller

$$A_i - 2A_u = G\vartheta^2 \int \left[\frac{1}{2} U_x^2 + \frac{1}{2} U_y^2 - 2U\right] dF = \text{Minimum}. \tag{3}$$

Sættes $U = xy\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(k_1 + k_2\frac{x}{a} + k_3\frac{y}{b}\right)$, hvor $k_1$, $k_2$ og $k_3$ er Konstanter, der bestemmes ved (3), er Randbetingelsen opfyldt. Bestemmelsesligningerne faas ved at differentiere i (3) m. H. t. hvert $k$, hvorved faas Ligninger af Formen

$$\int \left[U_x \frac{\partial U_x}{\partial k} + U_y \frac{\partial U_y}{\partial k} - 2\frac{\partial U}{\partial k}\right] dF = 0. \tag{4}$$

Man faar saa tre lineære Ligninger for $k_1$, $k_2$ og $k_3$, idet disse kun indgaar i $U_x$ og $U_y$, men ikke i $\frac{\partial U_x}{\partial k}, \frac{\partial U_y}{\partial k}$ og $\frac{\partial U}{\partial k}$. Med

$$\left.\begin{aligned} U_x &= y\left(1-2\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)k_1 + y\frac{x}{a}\left(2-3\frac{x}{a}-2\frac{y}{b}\right)k_2 + \frac{y^2}{b}\left(1-2\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)k_3 \\ U_y &= x\left(1-\frac{x}{a}-2\frac{y}{b}\right)k_1 + \frac{x^2}{a}\left(1-\frac{x}{a}-2\frac{y}{b}\right)k_2 + x\frac{y}{b}\left(2-2\frac{x}{a}-3\frac{y}{b}\right)k_3 \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

faas nu

$$\frac{\partial U}{\partial k_1} = xy\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right) \quad \frac{\partial U}{\partial k_2} = xy\frac{x}{a}\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right) \quad \frac{\partial U}{\partial k_3} = xy\frac{y}{b}\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial k_1} = y\left(1-2\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right) \quad \frac{\partial U_x}{\partial k_2} = y\frac{x}{a}\left(2-3\frac{x}{a}-2\frac{y}{b}\right) \quad \frac{\partial U_x}{\partial k_3} = \frac{y^2}{b}\left(1-2\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)$$

$$\frac{\partial U_y}{\partial k_1} = x\left(1-\frac{x}{a}-2\frac{y}{b}\right) \quad \frac{\partial U_y}{\partial k_2} = \frac{x^2}{a}\left(1-\frac{x}{a}-2\frac{y}{b}\right) \quad \frac{\partial U_y}{\partial k_3} = x\frac{y}{b}\left(2-2\frac{x}{a}-3\frac{y}{b}\right),$$

som giver

$$\left.\begin{aligned} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + a_{13}k_3 &= \iint 2\,xy\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dxdy = \frac{1}{60}a^2b^2 \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + a_{23}k_3 &= \iint 2\,xy\frac{x}{a}\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dxdy = \frac{1}{180}a^2b^2 \\ a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + a_{33}k_3 &= \iint 2\,xy\frac{y}{b}\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dxdy = \frac{1}{180}a^2b^2. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Her er

$$a_{11} = \iint\left[y^2\left(1-2\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2 + x^2\left(1-\frac{x}{a}-2\frac{y}{b}\right)^2\right]dxdy = \frac{ab}{180}\left(a^2+b^2\right)$$

$$a_{12} = \iint\left[y^2\frac{x}{a}\left(1-2\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(2-3\frac{x}{a}-2\frac{y}{b}\right) + \frac{x^3}{a}\left(1-\frac{x}{a}-2\frac{y}{b}\right)^2\right]dxdy =$$

$$= \frac{4\,ab}{7!}\left(3\,a^2+2\,b^2\right),$$

$$a_{13} = \iint\left[\frac{y^3}{b}\left(1-2\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2+\frac{x^2 y}{b}\left(1-\frac{x}{a}-2\frac{y}{b}\right)\left(2-2\frac{x}{a}-3\frac{y}{b}\right)\right] dxdy = \frac{4\,ab}{7!}\left(2\,a^2+3\,b^2\right)$$

$$a_{22} = \iint\left[y^2\frac{x^2}{a^2}\left(2-3\frac{x}{a}-2\frac{y}{b}\right)^2+\frac{x^4}{a^2}\left(1-\frac{x}{a}-2\frac{y}{b}\right)^2\right] dxdy = \frac{2\,ab}{7!}\left(3\,a^2+2\,b^2\right)$$

$$a_{23} = \iint\left[\frac{y^3 x}{ab}\left(2-3\frac{x}{a}-2\frac{y}{b}\right)\left(1-2\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)+\frac{x^3 y}{ab}\left(2-2\frac{x}{a}-3\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{x}{a}-2\frac{y}{b}\right)\right] dxdy = \\ = \frac{3\,ab}{7!}\left(a^2+b^2\right)$$

$$a_{21} = a_{12},\ a_{31} = a_{13},\ a_{32} = a_{23} \text{ og } a_{33} = \frac{2\,ab}{7!}\left(2\,a^2+3\,b^2\right).$$

Ved Udregningen af Integralerne benyttes

$$\iint x^n y^m\, dxdy = \frac{n!\ m!}{(n+m+2)!}\, a^{n+1} b^{m+1}. \tag{7}$$

Ligningerne (6) giver da, idet Hypotenusen $c$ indføres, og

$$\left.\begin{aligned} D &= 3\left(\frac{3}{4}+\frac{a^2 b^2}{c^4}\right),\ Dk_1 = 7\,\frac{ab}{c^2}\left(\frac{9}{4}-\frac{a^2 b^2}{c^4}\right) \\ Dk_2 &= -7\,\frac{ab}{c^2}\cdot\frac{a^2}{c^2}\left(1+2\,\frac{a^2}{c^2}\right);\ Dk_3 = -7\,\frac{ab}{c^2}\cdot\frac{b^2}{c^2}\left(1+2\,\frac{b^2}{c^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Ved (2) findes da

$$M = \frac{7}{540}\,\frac{15+4\dfrac{a^2 b^2}{c^4}}{3+4\dfrac{a^2 b^2}{c^4}}\,\frac{a^3 b^3}{c^2}\,G\vartheta. \tag{9}$$

Langs Siden $a$ er Forskydningsspændingerne

$$\tau_a = -\frac{x}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(k_1+k_2\,\frac{x}{a}\right)G\vartheta\, a \tag{10}$$

og langs $b$

$$\tau_b = \frac{y}{b}\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(k_1+k_3\frac{y}{b}\right)G\vartheta b \tag{11}$$

og langs c

$$\tau_c = \frac{z}{c}\left(1-\frac{z}{c}\right)\left(k_1+k_3+(k_2-k_3)\frac{z}{c}\right)G\vartheta c, \tag{12}$$

der alle har Formen

$$\tau = \xi(1-\xi)(\alpha+\xi)\cdot K, \tag{13}$$

hvor $\xi$ henholdsvis er $x:a$; $y:b$ og $z:c$, og $\alpha$ henholdsvis er $k_1:k_2$; $k_1:k_3$ og $(k_1+k_3):(k_2-k_3)$.

Største Værdi optræder for

$$\xi = \frac{1}{3}\left(1-\alpha-\sqrt{1+\alpha+\alpha^2}\right). \tag{14}$$

I nedenstaaende Tabel er $M$, $\max\tau_a$, $\max\tau_b$ og $\max\tau_c$ beregnet og ligeledes de Værdier af $x:a$; $y:b$ og $z:c$, for hvilke de optræder.

| $a:b$ | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 3,0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $k_1$ | 2,33 | 2,28 | 2,14 | 1,98 | 1,80 |
| $k_2$ | −1,17 | −1,85 | −2,13 | −2,18 | −2,10 |
| $k_3$ | −1,17 | −0,55 | −0,29 | −0,16 | −0,10 |
| $\frac{G\vartheta a^3b^3}{Mc^2}$ | 19,3 | 18,7 | 18,0 | 17,3 | 16,9 |
| $x:a$ | 0,42 | 0,37 | 0,33 | 0,32 | 0,31 |
| $y:b$ | 0,42 | 0,46 | 0,48 | 0,49 | 0,49 |
| $z:c$ | 0,50 | 0,38 | 0,33 | 0,32 | 0,31 |
| $\max\tau_a : G\vartheta\sqrt{ab}$ | 0,45 | 0,45 | 0,45 | 0,44 | 0,42 |
| $\max\tau_b : G\vartheta\sqrt{ab}$ | 0,45 | 0,41 | 0,35 | 0,30 | 0,25 |
| $\max\tau_c : G\vartheta\sqrt{ab}$ | 0,41 | 0,43 | 0,44 | 0,43 | 0,42 |

Det ses heraf, at største $\tau$ optræder langs den længste Katete omkring Tredjedelspunktet nærmest den rette Vinkel, og at dette $\tau$ for de i Praksis forekommende Tværsnit kan regnes til

$$\max\tau = 0{,}45\cdot G\vartheta\sqrt{ab}, \tag{15}$$

hvor $G\vartheta$ bestemmes ved (9), der dog paa Grundlag af Værdierne i Tabellen simplere kan sættes til

$$G\vartheta = \left(20{,}6-\frac{4}{3}\frac{a}{b}\right)\frac{Mc^2}{a^3b^3}, \tag{16}$$

hvor $a \geqq b$.